BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 021

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Determinantul matricei asociate sistemului este

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} && \text{adunăm a doua şi a treia linie la prima} \\ &= \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \\ &= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} && \text{folosim regula lui Sarrus} \\ &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

b) Sistemul este compatibil determinat când $\Delta \neq 0$. În acest caz sistemul are o unică soluție. Cum coeficienții lui y sunt exact termenii liberi ai sistemului, rezultă că $\boxed{x=0, y=1, z=0}$ este acestă unică soluție. Bineînțeles putem folosi și metoda lui Cramer ca să găsim această soluție.

c) Deoarece $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$, iar o sumă de pătrate perfecte de numere reale este 0 doar când toți termenii sunt zero, rezultă că $a-b=b-c=c-a=0$. Această condiție revine la $a=b=c$ și substituind în sistem, acesta va consta în trei ecuații identice: $ax+ay+az=a$. Scriind această ecuație sub forma $a(x+y+z-1)=0$, distingem cazurile:
Cazul $a \neq 0$.

In acest caz se impune ca $x+y+z-1=0 \Leftrightarrow z-1=-x-y$. Condiția suplimentară devine $x^2+x+y^2+y=0$. Scriem acestă relație sub forma $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ și observăm că pentru orice $t \in \mathbb{R}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos t - \frac{1}{2}\right)$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin t - \frac{1}{2}\right)$ satisfac relația deci există o infinitate de soluții ce satisfac condiția din enunț.

2. Problema 2

a) Cum fiecare dintre a, b și c poate lua 4 valori în $\mathbb{Z}_4$, există $4 \cdot 4 \cdot 4 = \boxed{64}$, matrice de forma $\begin{pmatrix} a & b \\ \hat{0} & c \end{pmatrix}$.

b) Matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ are determinantul $\det A = \hat{2} \neq \hat{0}$, dar $\det(A^2) = (\det A)^2 = \hat{2}^2 = \hat{0}$.

c) Fie $X = \begin{pmatrix} x & y \\ \hat{0} & z \end{pmatrix} \in G$ astfel încât $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$. Făcând înmulțirea, avem $X^2 = \begin{pmatrix} x^2 & y(x+z) \\ \hat{0} & z^2 \end{pmatrix}$, deci condiția din enunț revine la următorul sistem

$$\begin{cases} x^2 & = \hat{1} \\ z^2 & = \hat{0} \\ y(x+z) & = \hat{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{\hat{1}, \hat{3}\} \\ z \in \{\hat{0}, \hat{2}\} \\ y(x+z) = \hat{0} \end{cases}$$

Observând că $x+z$ poate lua doar valorile $\hat{1}, \hat{3}$ care sunt inversabile, din a treia ecuație rezultă că $y = \hat{0}$. Atunci matricea X poate lua $2 \cdot 1 \cdot 2 = \boxed{4}$ valori.