BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 020

versiune definitivă

1. Problema 1

b) Ştim că punctul a) era primul, dar este mai bine aşa.

Matricea sistemului este $M = \begin{pmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$. Folosind formula lui Sarrus avem $\det M = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc \neq 0$. Cum determinantul matricei asociate sistemului este nenul, conform teoremei lui Cramer sistemul are soluţie unică.

Nu ni s-a cerut această soluţie, dar o vom folosi pentru celelalte puncte. Cu metoda lui Cramer avem

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix}}{-2abc} = \frac{a^3 - ac^2 - ab^2}{-2abc} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix}}{-2abc} = \frac{b^3 - bc^2 - ba^2}{-2abc} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} b & a & c \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}}{-2abc} = \frac{c^3 - a^2c - b^2c}{-2abc} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

a) Folosind forma soluţiei sistemului găsită mai sus, avem

$$x = \frac{4^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$y = \frac{3^2 + 5^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = \boxed{\frac{3}{5}}$$

$$z = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \boxed{0}$$

c) Conform teoremei cosinusului

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos \hat{A} \in [-1, 1]$$

$$y = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \cos \hat{B} \in [-1, 1]$$

$$z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos \hat{C} \in [-1, 1]$$

Comentariu. La punctul c), x, y, z sunt în intervalul $(-1, 1)$ doar dacă se adaugă în enunţ că avem un triunghi **nedegenerat** (care nu are unghiuri de $0°$ sau $180°$).

2. Problema 2

Pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$, notăm $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

a) Cum $G = \{X(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_3\}$, iar atât a cât și b pot lua cele 3 valori, mulțimea G are $3 \cdot 3 = \boxed{9}$ elemente.

b) Fie $A, B \in G$. Există atunci $a, \alpha, b, \beta \in \mathbb{Z}_3$ astfel încât $A = X(a, \alpha)$, $B = X(b, \beta)$. Avem

$$\begin{aligned} AB &= X(a,\alpha)X(b,\beta) = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \alpha & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \beta \\ \beta & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab + \alpha\beta & a\beta + b\alpha \\ a\beta + b\alpha & ab + \alpha\beta \end{pmatrix} \\ &= X(ab + \alpha\beta, a\beta + b\alpha) \in G \end{aligned}$$

c) Fie $X(a,b) \in G$ matrice cu determinant nul. Aceasta revine la

$$\det X(a,b) = a^2 - b^2 = \hat{0} \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = \hat{0}\,.$$

Cum $\mathbb{Z}_3$ este corp (deci domeniu de integritate) ultima egalitate este echivalentă cu faptul că $a - b = \hat{0}$ sau $a + b = \hat{0}$. Matricele cu aceste proprietăți sunt $X(\hat{0},\hat{0}), X(\hat{1},\hat{1}), X(\hat{1},\hat{2}), X(\hat{2},\hat{1}), X(\hat{2},\hat{2})$, deci în număr de $\boxed{5}$.