

# **BAC 2008**

[www.e-bacalaureat.com](http://www.e-bacalaureat.com)

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 019

versiune definitivă

## 1. Problema 1

a) Avem

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{scădem prima linie din celelalte}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad \text{determinantul matricei triangulare este produsul elementelor de pe diagonală}$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = \boxed{-8}$$

b) Scădem succesiv a doua, a treia și a patra ecuație din prima și obținem  $2y = 2z = 2t = 1$ . De aici  $y = z = t = \frac{1}{2}$ . Substituind în prima ecuație, deducem și  $x = -\frac{1}{2}$ .

c) Matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  a sistemului este inversabilă căci are determi-

nantul nenul conform punctului a). Fie  $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \end{pmatrix}$ . Scriind înmulțirea  $A^{-1} \cdot A$  și făcând identificarea cu  $I_4$  se obțin sistemele următoare:

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 1 \\ x - y + z + t &= 0 \\ x + y - z + t &= 0 \\ x + y + z - t &= 0 \end{aligned}$$

Recunoaștem sistemul de la punctul b), deci  $x = -1/2, y = z = t = 1/2$ .

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 0 \\ a - b + c + d &= 1 \\ a + b - c + d &= 0 \\ a + b + c - d &= 0 \end{aligned}$$

Procedând ca la rezolvarea lui b) se obțin  $a = 1/2, b = -1/2, c = d = 0$ .

•

$$e + f + g + h = 0$$

$$e - f + g + h = 0$$

$$e + f - g + h = 1$$

$$e + f + g - h = 0$$

Procedând analog cu punctul b), deducem  $e = 1/2, f = 0, g = -1/2, h = 0$ .

•

$$j + k + l + m = 0$$

$$j - k + l + m = 0$$

$$j + k - l + m = 0$$

$$j + k + l - m = 1$$

Cred că deja v-ati prins deja că veti obține  $j = 1/2, k = l = 0, m = -1/2$ .  
Lipim toate acestea și avem

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

## 2. Problema 2

a) Vom folosi următoarele relații ale lui Viète

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{-2}{1} = 2$$

$$S_4 = x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{1} = 1$$

Avem atunci

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{S_3}{S_4} = \boxed{2}$$

b) Fie  $x \in \mathbb{R}^*$ . Prin calcul direct avem

$$\begin{aligned} x^2 \left[ \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \left( x - \frac{1}{x} \right) + a + 2 \right] &= x^2 \left[ x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + 2x - \frac{2}{x} + a + 2 \right] \\ &= x^2 \left[ x^2 + 2x + a - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right] = f(x) \end{aligned}$$

c) Observăm că ecuația  $f(x) = 0$  nu poate avea rădăcina  $x = 0$ . Atunci folosind punctul b), ecuația  $f(x) = 0$  este echivalentă cu

$$\left( x - \frac{1}{x} \right)^2 + 2 \left( x - \frac{1}{x} \right) + a + 2 = 0$$

Notăm  $y = x - \frac{1}{x}$ . Cum ecuația  $y = x - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - yx - 1 = 0$  are discriminantul  $y^2 + 4$ , va avea ambele rădăcinile reale pentru orice valoare reală a lui  $y$ . Astfel ecuația  $f(x) = 0$  are toate rădăcinile reale dacă ecuația de gradul doi

$$y^2 + 2y + a + 2 = 0$$

în necunoscuta  $y$ , are ambele rădăcini reale. Or aceasta revine la faptul că

$$\Delta = 4 - 4(a + 2) = -4(a + 1) \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -1.$$