BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 019

versiune preliminară

1. Problema 1

a) Prin calcul direct avem

$$\begin{aligned} f(i) &= \det(iA+B) = \begin{vmatrix} 0 & i-1 \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} = (i-1)^2 = i^2 - 2i + 1 = -2i \\ f(-i) &= \det(-iA+B) = \begin{vmatrix} 0 & -i-1 \\ i+1 & 0 \end{vmatrix} = (i+1)^2 = i^2 + 2i + 1 = 2i \end{aligned}$$

Atunci $f(i)f(-i) = (-2i)\cdot(2i) = -4i^2 = \boxed{4}$.

b) Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Atunci

$$\begin{aligned} \det(xA+B) &= \begin{vmatrix} xa_{11}+b_{11} & xa_{12}+b_{12} \\ xa_{21}+b_{21} & xa_{22}+b_{22} \end{vmatrix} \\ &= (xa_{11}+b_{11})(xa_{22}+b_{22}) - (xa_{12}+b_{12})(xa_{21}+b_{21}) \\ &= x^2(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}) + x(a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-a_{12}b_{21}-a_{21}b_{12}) + (b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21}) \\ &= (\det A)x^2 + ax + \det B \end{aligned}$$

unde $a = a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}-a_{12}b_{21}-a_{21}b_{12}$.

c) Dacă $AB = BA$ atunci $(iA+B)(-iA+B) = -i^2A^2 + i(AB-BA) + B^2 = A^2+B^2$. Trecând la determinați rezultă $f(i)f(-i) = \det(iA+B)\cdot\det(-iA+B) = \det[(iA+B)(-iA+B)] = \det(A^2+B^2) = 0$. Or, folosind punctul b) avem $f(i)f(-i) = [(\det B - \det A) + ia][(\det B - \det A) - ia] = (\det B - \det A)^2 + a^2$. Cum $\det B - \det A$ și a sunt numere reale, din $0 = (\det B - \det A)^2 + a^2$ rezultă că $\det B - \det A = a = 0$, deci $\det A = \det B$.

2. Problema 2

a) Avem $f_2 = 1 - \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X(X-1)$, deci $f_2(2) = 1 - 2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2-1) = \boxed{0}$.

b) Cum $f_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} X(X-1)\dots(X-k+1)$, iar pentru fiecare $k \in \{1,2,\dots,n\}$ polinomul $\frac{(-1)^k}{k}X(X-1)\dots(X-k+1)$ are gradul k, rezultă că f_n este un polinom de gradul n cu coeficientul dominant $\frac{(-1)^n}{n!}$.

Pentru orice $k \in \{1,2,\dots,n\}$ avem

$$\begin{aligned} f_n(k) &= 1 - \frac{k}{1!} + \frac{k(k-1)}{2!} - \dots + (-1)^k\frac{k(k-1)\dots\cdot 1}{k!} \\ &= C_k^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^k C_k^k = 0 \end{aligned}$$

Rezultă că rădăcinile polinomului f_n sunt $1,2,\dots,n$ și atunci

$$f_n = \frac{(-1)^n}{n!}(X-1)(X-2)\dots(X-n).$$

c) Presupunem că există $m \in \mathbb{Z}$ rădăcină a lui g_n. Atunci $f_n(m) = -\frac{1}{n!}$. Folosind punctul b) această egalitate revine la $(m-1)(m-2)\ldots(m-n) = 1$.Cum $n \geq 2$, membrul stâng are cel puțin un factor diferit de 1. Contradicția obținută demonstrează că presupunerea făcută este falsă.