

# **BAC 2008**

[www.e-bacalaureat.com](http://www.e-bacalaureat.com)

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 018

versiune definitivă

## 1. Problema 1

a) Prin calcul direct avem  $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_3}$ .

b) Un calcul simplu ne arată că

$$I_3 + A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Având toate liniile egale și cel puțin un element nenul (chiar toate sunt nenule), rangul acestei matrice este  $\boxed{1}$ .

c) Cum  $A^3 = 0_3$ , avem  $I_3 = I_3 + A^3 = (I_3 + A)(I_3 - A + A^2)$ , deci inversa matricei  $I_3 + A$  este

$$I_3 - A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

## 2. Problema 2

a) Avem de rezolvat ecuația  $x^3 + 8x^2 + 20x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 8x + 20) = 0$ . Discriminantul ecuației de gradul doi  $x^2 + 8x + 20 = 0$  este  $\Delta = -16 = (4i)^2$  și deducem că rădăcinile ecuației din enunț sunt

$$\boxed{x_1 = 0, x_2 = -4 + 2i, x_3 = -4 - 2i}.$$

b) Folosind următoarele relații ale lui Viète

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -4a \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= 20 \end{aligned}$$

avem

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 6(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= 2 \cdot (-4a)^2 - 6 \cdot 20 = 8(4a^2 - 15) \end{aligned}$$

**Comentariu.** Enunțul conține o greșeală de tipar (și anume lipsește un 1 în fața lui 5)!

c) Condițiile pentru ca  $-a$  să fie rădăcină dublă pentru  $f$  sunt  $f(-a) = f'(-a) = 0$ . Din  $f(-a) = 0$  deducem

$$-a^3 + 4a^3 - 20a + b = 0 \Leftrightarrow b = 20a - 3a^3$$

Cum  $f'(x) = 3x^2 + 8ax + 20$ , condiția  $f'(-a) = 0$  revine la

$$3a^2 - 8a^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a \in \{-2, 2\}$$

Discutăm cazurile

- Pentru  $a = -2$ , obținem  $b = 20(-2) - 3(-2)^3 = -16$
- Pentru  $a = 2$ , obținem  $b = 20 \cdot 2 - 3 \cdot 2^3 = 16$