

BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 017

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Deoarece

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

avem $A^2 - B^2 = I_2 - I_2 = \boxed{0_2}$.b) Am văzut la punctul a) că $A^2 = I_2$. Atunci

$$A^4 = (A^2)^2 = I_2^2 = I_2$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A$$

$$\det(I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4) = \det(3I_2 + 2A) = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{5}$$

c) Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, fie $X(k) = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Atunci

$$X(k)^2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

deci pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, matricele $X(k)$ satisfac condiția și avem o infinitate de soluții.**Comentariu.** Se poate observa că am 'construit' matricele $X(k)$ pornind de la forma lui A . Într-adevăr, avem $A = X(3)$.

2. Problema 2

a) Facem efectiv împărțirea lui f la g sau observăm că

$$\begin{aligned} f &= (X^4 - X^2) + (X^3 - X) + 2(X^2 - 1) + 2X + 3 \\ &= (X^2 - 1)(X^2 + X + 2) + 2X + 3 \end{aligned}$$

Rezultă că restul împărțirii lui f la g este $\boxed{2X + 3}$.b) **Prima soluție.** Deoarece rădăcinile lui f sunt x_1, x_2, x_3, x_4 , avem factorizarea $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4)$. Atunci $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) = f(1) = \boxed{5}$.**A doua soluție.** Folosim relațiile lui Viète

$$s_1 \stackrel{def}{=} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$$

$$s_2 \stackrel{def}{=} x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 1$$

$$s_3 \stackrel{def}{=} x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -1$$

$$s_4 \stackrel{def}{=} x_1x_2x_3x_4 = 1$$

Efectuând înmulțirile și aranjând convenabil termenii avem

$$\begin{aligned} (1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)(1 - x_4) &= 1 - s_1 + s_2 - s_3 + s_4 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = \boxed{5} \end{aligned}$$

A treia soluție. Notăm $1 - x = y \Leftrightarrow x = 1 - y$. Ecuația satisfăcută de y este $(1-y)^4 + (1-y)^3 + (1-y)^2 + (1-y) + 1 = 0$ și are patru rădăcini. Produsul acestor rădăcini este raportul dintre termenul liber $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ și coeficientul dominant $(-1)^4 = 1$. Atunci $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) = y_1y_2y_3y_4 = \frac{5}{1} = \boxed{5}$.

c) Vom merge pe ideea folosită deja la prima soluție de la punctul b). Avem

$$\begin{aligned}g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4) &= \prod_{k=1}^4 (x_k^2 - 1) = \prod_{k=1}^4 (-x_k - 1)(-x_k + 1) \\ &= \prod_{k=1}^4 (-1 - x_k) \prod_{k=1}^4 (1 - x_k) = f(-1)f(1) = 5 \cdot 1 = \boxed{5}\end{aligned}$$