BAC 2008

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 017

versiune preliminară

1. Problema 1

a) Deoarece

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$
$$B^2 = \begin{pmatrix}-3 & -8\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$

avem $A^2 - B^2 = I_2 - I_2 = \boxed{0_2}$.

b) Am văzut la punctul a) că $A^2 = I_2$. Atunci $A^{2k} = (A^2)^k = I_2^k = I_2$ și $A^{2k+1} = A^{2k} \cdot A = I_2 \cdot A = A$, pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Distingem cazurile:

- $\mathbf{n = 2k}$. Atunci $\det(A + A^2 + \ldots + A^{2k}) = \det(kA + kI_2) = \begin{vmatrix}2k & 3k\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0.$
- $\mathbf{n = 2k+1}$. În acest caz $\det(A + A^2 + \ldots + A^{2k+1}) = \det((k+1)A + kI_2) = \begin{vmatrix}2k+1 & 3k+3\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -2k - 1 \neq 0.$

În concluzie, valorile lui n pentru care condiția din enunț este satisfăcută sunt cele pare, adică $\boxed{n \in \{2k | k \in \mathbb{N}^*\}}$.

c) Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, fie $X(k) = \begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & -1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ și $Y(k) = \begin{pmatrix}-k & 1-k^2\\ 1 & k\end{pmatrix}$.

Facem următoarele calcule (steluțele arată că nu ne interesează acele elemente).

$$X(k)^2 = \begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$
$$Y(k)^2 = \begin{pmatrix}-k & 1-k^2\\ 1 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k & 1-k^2\\ 1 & k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$
$$X(k)Y(k) = \begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k & 1-k^2\\ 1 & k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \star\\ \star & \star\end{pmatrix}$$
$$Y(k)X(k) = \begin{pmatrix}-k & 1-k^2\\ 1 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k & \star\\ \star & \star\end{pmatrix}$$

Se observă că pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, matricele $X(k)$ și $Y(k)$ satisfac condițiile cerute.
Comentariu. Se poate observa că am 'construit' matricele $X(k)$ și $Y(k)$ pornind de la forma lui A și B. Într-adevăr, avem $A = X(3), B = Y(3)$.

2. Problema 2

a) Facem efectiv împărțirea lui f la g sau observăm că $f = (X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X) - (X^3 + 2X^2 + 3X + 4) + 5 = (X-1)g + 5$. Rezultă că restul împărțirii lui f la g este $\boxed{5}$.

b) **Prima soluție.** Deoarece rădăcinile lui f sunt x_1, x_2, x_3, x_4, avem factorizarea $f = (X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$. Atunci $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) = f(1) = \boxed{5}$.

A doua soluție. Folosim relațiile lui Viète

$$\begin{aligned} s_1 &\stackrel{def}{=} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ s_2 &\stackrel{def}{=} x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 1 \\ s_3 &\stackrel{def}{=} x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -1 \\ s_4 &\stackrel{def}{=} x_1x_2x_3x_4 = 1 \end{aligned}$$

Efectuând înmulțirile și aranjând convenabil termenii avem

$$\begin{aligned} (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) &= 1 - s_1 + s_2 - s_3 + s_4 \\ &= 1+1+1+1+1 = \boxed{5} \end{aligned}$$

A treia soluție. Notăm $1 - x = y \Leftrightarrow x = 1 - y$. Ecuația satisfăcută de y este $(1-y)^4+(1-y)^3+(1-y)^2+(1-y)+1 = 0$ și are patru rădăcini. Produsul acestor rădăcini este raportul dintre termenul liber $1+1+1+1+1 = 5$ și coeficientul dominant $(-1)^4 = 1$. Atunci $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) = y_1y_2y_3y_4 = \dfrac{5}{1} = \boxed{5}$.

c) Revenim la relația $f = (X-1)g + 5$ demonstrată la punctul a). De aici, $0 = f(x_k) = (x_k-1)g(x_k)+5$ pentru orice $k \in \{1,2,3,4\}$. Deducem $g(x_k) = \dfrac{5}{1-x_k}$, $k \in \{1,2,3,4\}$. Înmulțind aceste relații vom avea

$$\begin{aligned} g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4) &= \frac{5}{1-x_1} \cdot \frac{5}{1-x_2} \cdot \frac{5}{1-x_3} \cdot \frac{5}{1-x_4} \\ &= \frac{5^4}{5} = \boxed{5^3 = 125} \end{aligned}$$