

# **BAC 2008**

[www.e-bacalaureat.com](http://www.e-bacalaureat.com)

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 016

versiune definitivă

## 1. Problema 1

- a) Pentru simplitatea scrierii vom nota cu  $X(a, \alpha)$  matricea  $\begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Fie  $A, B \in G$ . Există atunci  $a, b > 0$  și  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  astfel încât  $A = X(a, \alpha), B = X(b, \beta)$ . Atunci

$$AB = X(a, \alpha)X(b, \beta) = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & a\beta + \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X(ab, a\beta + \alpha)$$

Cum  $ab > 0$ , rezultă că  $AB \in G$ .

- b) Luăm  $C = X(1, 1) \in G$  și  $D = X(2, 1) \in G$ . Folosind relația demonstrată la punctul a) avem

$$CD = X(1, 1)X(2, 1) = X(1 \cdot 2, 1 \cdot 1 + 1) = X(2, 2)$$

$$DC = X(2, 1)X(1, 1) = X(2 \cdot 1, 2 \cdot 1 + 1) = X(2, 3)$$

deci  $CD \neq DC$ .

- c) Cum  $A \in G$ , există  $a, \alpha \in \mathbb{R}, a > 0$  astfel ca  $A = X(a, \alpha)$ . Calculăm mai întâi

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a\alpha + \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

și avem

$$I_2 - A + A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 & a\alpha + \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a + a^2 & a\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pentru ca această matrice să fie în  $G$  este necesar și suficient ca  $1 - a + a^2$  să fie strict pozitiv, ceea ce este o consecință a faptului că funcția de gradul doi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(a) = 1 - a + a^2$  are valoarea minimă  $\frac{3}{4} > 0$ .

## 2. Problema 2

- a) **Prima soluție.** Cunoscând toate rădăcinile polinomului, îl putem scrie sub forma  $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - 1)^2(x + 2) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 - 3x + 2$ . Rezultă că  $a = 0, b = -3, c = 2$ .

**A doua soluție.** Conform relațiilor lui Viète, avem

$$a = -(x_1 + x_2 + x_3) = -(1 + 1 - 2) = 0$$

$$b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) = -3$$

$$c = -x_1x_2x_3 = -1 \cdot 1 \cdot (-2) = 2$$

- b) **Prima soluție.** Reamintim că dacă un polinom cu coeficienți raționali are rădăcina  $m + n\sqrt{d}$ , cu  $m, n, d \in \mathbb{Q}$  și  $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$ , atunci are și rădăcina conjugată  $m - n\sqrt{d}$ . Cum  $f$  este polinom cu coeficienți raționali și are rădăcina  $x_1 = \sqrt{2}$ , admite și rădăcina  $x_2 = -\sqrt{2}$ . Folosind prima relație a lui Viète,  $x_1 + x_2 + x_3 = -a \Leftrightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} + x_3 = -a$ , deducem că  $x_3 = -a \in \mathbb{Q}$ .

**A doua soluție.** Faptul că  $\sqrt{2}$  este rădăcină a lui  $f$  revine la  $f(\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} + 2a + b\sqrt{2} + c = 0$ . Scriem această relație sub forma  $\sqrt{2}(b+2) + (2a+c) = 0$  și deducem că  $b+2 = 2a+c = 0$ . ▼[detalii]

Dacă  $b+2 \neq 0$  atunci  $\sqrt{2} = -\frac{2a+c}{b+2} \in \mathbb{Q}$  căci  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . Contradicție.

Deci  $b = -2$  și  $c = -2a$ . Polinomul se scrie  $f = X^3 + aX^2 - 2X - 2a = X^2(X+a) - 2(X+a) = (X+a)(X^2-2)$  și evident are rădăcina rațională  $-a$ .

- c) Presupunem că  $f$  admite o rădăcină întregă  $p$ . Atunci există un polinom  $g$  cu coeficienți întregi astfel încât  $f = (X-p)g$  și prin urmare  $f(0) = -pg(0)$  și  $f(1) = (1-p)g(1)$  sunt numere impare. Rezultă că  $-p$  și  $1-p$  sunt numere impare. Contradicție, căci  $-p$  și  $1-p$  sunt numere întregi consecutive. Presupunerea făcută este deci falsă.

**Comentariu.** Nu am folosit faptul că  $f$  este de gradul 3, sau că are coeficientul dominant 1. Această proprietate este valabilă pentru orice polinom cu coeficienți întregi.