BAC 2008

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 016

versiune preliminară

1. Problema 1

a) Pentru simplitatea scrierii vom nota cu $X(a,b)$ matricea $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Fie $A, B \in G$.
Există atunci $a, b > 0$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $A = X(a, \alpha), B = X(b, \beta)$. Atunci

$$AB = X(a,\alpha)X(b,\beta) = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab & a\beta + \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X(ab, a\beta + \alpha)$$

Cum $ab > 0$, rezultă că $AB \in G$.

b) Luăm $C = X(1,1) \in G$ și $D = X(2,1) \in G$. Folosind relația demonstrată la punctul a) avem

$$\begin{aligned} CD &= X(1,1)X(2,1) = X(1\cdot 2, 1\cdot 1 + 1) = X(2,2) \\ DC &= X(2,1)X(1,1) = X(2\cdot 1, 2\cdot 1 + 1) = X(2,3) \end{aligned}$$

deci $CD \neq DC$.

c) Cum $A \in G$, există $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $a > 0$ astfel ca $A = X(a, \alpha)$. Facem calculele următoare

$$\begin{aligned} A^2 &= X(a,\alpha)X(a,\alpha) = X(a^2, a\alpha + \alpha), \\ A^3 &= A^2 \cdot A = X(a^2, a\alpha + \alpha)X(a,\alpha) = X(a^3, a^2\alpha + a\alpha + \alpha) \end{aligned}$$

Se observă și se poate demonstra prin inducție că

$$A^n = X(a^n, a^{n-1}\alpha + a^{n-2}\alpha + \ldots + a\alpha + \alpha)$$

Atunci

$$\begin{aligned} & I_2 - A + A^2 - A^3 + \ldots - A^{2007} + A^{2008} \\ = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{2008} \begin{pmatrix} a^n & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots - a^{2007} + a^{2008} & \star \\ 0 & \underbrace{1 - 1 + 1 - 1 + \ldots - 1 + 1}_{2009 \ de \ 1} \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1 - a + a^2 - a^3 + \ldots - a^{2007} + a^{2008} & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Prin $\star$ înțelegem faptul că nu ne interesează acel element. Pentru ca această matrice să fie în G este necesar și suficient ca $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots - a^{2007} + a^{2008}$ să fie strict pozitiv. Or pentru $a \neq -1$ (și $a > 0$ în cazul de față) folosind formula sumei primilor termeni ai unei progresii geometrice de rație $-a$, avem $1 - a + a^2 - a^3 + \ldots - a^{2007} + a^{2008} = \dfrac{1 + a^{2009}}{1 + a} > 0$.

2. Problema 2

a) **Prima soluție.** Cunoscând toate rădăcinile polinomului, îl putem scrie sub forma $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x - 1)^2(x + 2) = (x^2 - 2x + 1)(x + 2) = x^3 - 3x + 2$.
Rezultă că $\boxed{a = 0,\ b = -3,\ c = 2}$.

A doua soluție. Conform relațiilor lui Viète, avem

$$\begin{aligned} a &= -(x_1+x_2+x_3) = -(1+1-2) = 0 \\ b &= x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 1\cdot 1+1\cdot(-2)+1\cdot(-2) = -3 \\ c &= -x_1x_2x_3 = -1\cdot 1\cdot(-2) = 2 \end{aligned}$$

b) **Prima soluție.** Reamintim că dacă un polinom cu coeficienți raționali are rădăcina $m+n\sqrt{d}$, cu $m,n,d\in\mathbb{Q}$ și $\sqrt{d}\notin\mathbb{Q}$, atunci are și rădăcina conjugată $m-n\sqrt{d}$. Cum f este polinom cu coeficienți raționali și are rădăcina $x_1=\sqrt{2}$, admite și rădăcina $x_2=-\sqrt{2}$. Folosind prima relație a lui Viète, $x_1+x_2+x_3=-a \Leftrightarrow \sqrt{2}-\sqrt{2}+x_3=-a$, deducem că $x_3=-a\in\mathbb{Q}$.
A doua soluție. Faptul că $\sqrt{2}$ este rădăcină a lui f revine la $f(\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}+2a+b\sqrt{2}+c=0$. Scriem această relația sub forma $\sqrt{2}(b+2)+(2a+c)=0$ și deducem că $b+2=2a+c=0$. ▼[detalii]

Dacă $b+2\neq 0$ atunci $\sqrt{2}=-\dfrac{2a+c}{b+2}\in\mathbb{Q}$ căci $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Contradicție.

Deci $b=-2$ și $c=-2a$. Polinomul se scrie $f=X^3+aX^2-2X-2a=X^2(X+a)-2(X+a)=(X+a)(X^2-2)$ și evident are rădăcina rațională $-a$.

c) Presupunem că f admite o rădăcină întreagă p. Atunci există un polinom g cu coeficienți întregi astfel încât $f=(X-p)g$ și prin urmare $f(0)=-pg(0)$ și $f(1)=(1-p)g(1)$ sunt numere impare. Rezultă că $-p$ și $1-p$ sunt numere impare. Contradicție, căci $-p$ și $1-p$ sunt numere întregi consecutive. Presupunerea făcută este deci falsă.
Comentariu. Nu am folosit faptul că f este de gradul 3, sau că are coeficientul dominant 1. Această proprietate este valabilă pentru orice polinom cu coeficienți întregi.