BAC 2008

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 015

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Determinantul sistemului este

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \boxed{a^3+b^3+c^3-3abc}$$

Am folosit regula lui Sarrus pentru calculul unui determinant de ordinul 3.

b) Conform ipotezei $\Delta \neq 0$, deci folosind teorema lui Cramer sistemul are o soluție unică.

c) Presupunem că $a+b+c=0$ și sistemul este compatibil. Adunând cele trei ecuații ale sistemului obținem $(a+b+c)x+(a+b+c)y+(a+b+c)z=3 \Leftrightarrow 0=3$. Contradicția obținută demonstrează că presupunerea făcută este falsă.

2. Problema 2

a) Vom avea nevoie de două din relațiile lui Viète, anume

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 &= -\frac{0}{1}=0 \\ x_1x_2x_3x_4 &= \frac{5}{1}=5 \end{aligned}$$

Aducând la același numitor, expresia de calculat se scrie

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}=\frac{0}{5}=\boxed{0}$$

b) Ecuația $f(x)=0$ poate fi rezolvată, fiind bipătrată. Notăm $t=x^2$ și obținem $t^2-5t+5=0$, ecuație de gradul doi cu rădăcinile $t_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}>0$ și $t_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}>0$. Revenind și rezolvând ecuația $x^2=t_1=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ obținem rădăcinile $x_1=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ și $x_2=-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, iar din ecuația $x^2=t_2=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ obținem rădăcinile $x_3=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$ și $x_4=-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Se vede acum că toate cele patru rădăcini ale lui f sunt numere reale.

c) Cum inegalitatea $|g(x)| \leq |f(x)$ este satisfăcută pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem în particular $|g(x_1)| \leq |f(x_1)|=0$, deci x_1 este o rădăcină și pentru g. Analog se arată că x_2, x_2 și x_4 sunt și ele rădăcini ale lui g. Atunci polinomul g se divide prin $(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)=f$. Există deci un polinom a cu coeficienți reali astfel încât $g=af$. Inegalitatea din enunț se scrie $|f(x)|\cdot|a(x)| \leq |f(x)|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Ca o consecință, $|a(x)| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}\backslash\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. Dacă gradul lui a ar fi nenul, atunci $\lim_{x\to\infty}|a(x)|=\infty$, ceea ce contrazice inegalitatea precedentă. Rezultă că a este polinom constant, care în plus satisface $|a| \leq 1$, adică $a \in [-1,1]$.