

# **BAC 2008**

[www.e-bacalaureat.com](http://www.e-bacalaureat.com)

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 015

versiune preliminară

## 1. Problema 1

- a) Matricea  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M$  are determinantul nul, având ultimele două linii egale. Cum minorul  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  de ordinul 2, dat de elementele aflate pe primele două linii și primele două coloane, are determinantul  $2 \neq 0$ , rangul lui  $A$  este 2.
- b) Fie  $B = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  și  $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  două matrice din  $M$ . Vom arăta ca produsul  $BC$  nu poate avea 0 drept element aflat pe prima linie și a doua coloană și prin urmare produsul  $BC$  nu poate fi matricea  $0_3$ . Într-adevăr acest element al matricei  $BC$  va fi  $b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} + b_{13}c_{32}$ . Fiecare din produsele  $b_{11}c_{12}$ ,  $b_{12}c_{22}$  și  $b_{13}c_{32}$  este  $\pm 1$  (factorii fiind 1 sau  $-1$ ). Dar suma a trei numere impare este număr impar, deci nu poate fi 0.
- c) O matrice cu 3 linii și 3 coloane are  $3 \cdot 3 = 9$  elemente. Fiecare poate lua una din cele 2 valori 1 sau  $-1$ . Avem atunci  $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{9 \text{ ori}} = 2^9 = \boxed{512}$  matrice în  $M$ .

## 2. Problema 2

- a) Vom avea nevoie de două din relațiile lui Viète, anume

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 &= -\frac{0}{1} = 0 \\ x_1x_2x_3x_4 &= \frac{5}{1} = 5 \end{aligned}$$

Aducând la același numitor, expresia de calculat se scrie

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4} = \frac{0}{5} = \boxed{0}$$

- b) Ecuația  $f(x) = 0$  poate fi rezolvată, fiind bipătrată. Notăm  $t = x^2$  și obținem  $t^2 - 5t + 5 = 0$ , ecuație de gradul doi cu rădăcinile  $t_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2} > 0$  și  $t_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} > 0$ . Revenind și rezolvând ecuația  $x^2 = t_1 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$  obținem rădăcinile  $x_1 = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$  și  $x_2 = -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$ , iar din ecuația  $x^2 = t_2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}$  obținem rădăcinile  $x_3 = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$  și  $x_4 = -\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$ . Se vede acum că toate cele patru rădăcini ale lui  $f$  sunt numere reale.
- c) Cum inegalitatea  $|g(x)| \leq |f(x)$  este satisfăcută pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , avem în particular  $|g(x_1)| \leq |f(x_1)| = 0$ , deci  $x_1$  este o rădăcină și pentru  $g$ . Analog se arată că  $x_2, x_3$  și  $x_4$  sunt și ele rădăcini ale lui  $g$ . Atunci polinomul  $g$  se divide prin  $(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) = f$ . Există deci un polinom  $a$  cu coeficienți reali astfel încât  $g = af$ . Inegalitatea din enunț se scrie  $|f(x)| \cdot |a(x)| \leq |f(x)|$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ . Ca o consecință,  $|a(x)| \leq 1$  pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Dacă

gradul lui  $a$  ar fi nenul, atunci  $\lim_{x \rightarrow \infty} |a(x)| = \infty$ , ceea ce contrazice inegalitatea precedentă. Rezultă că  $a$  este polinom constant, care în plus satisface  $|a| \leq 1$ , adică  $a \in [-1, 1]$ .