BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 014

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Scăzând un multiplu al unei linii din celelalte linii obţinem o matrice cu acelaşi rang cu cea iniţială. Atunci A are acelaşi rang cu matricea $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (am scăzut dublul primei linii din a doua şi triplul primei linii din a treia). Este evident acum că rangul acestei matrice este $\boxed{1}$, deoarece $a \neq 0$.

c) Ştim că b) era înainte de c) dar este mai simplu aşa. Luăm $K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ şi $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ şi avem

$$KL = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = A\,.$$

b) Să observăm mai întâi că $LK = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 2c \end{pmatrix}$ (matrice cu o linie şi o coloană). Notăm $d = a + 2b + 3c$. Folosind punctul c) şi asociativitatea înmulţirii matricelor, avem $A^2 = A \cdot A = (KL)(KL) = K(LK)L = d \cdot KL = dA$.

2. Problema 2

a) Putem face calcule directe, dar preferăm o abordare diferită care ne va ajuta şi la punctul următor. Polinomul f are coeficienţi reali, deci ca să-l admită pe a ca rădăcină, trebuie să aibă şi rădăcina $\bar{a} = \sqrt{3} + i$. Folosind relaţiile lui Viète, cum $a + \bar{a} = 2\sqrt{3}$ şi $a\bar{a} = (\sqrt{3})^2 - i^2 = 4$, polinomul de gradul doi cu coeficientul dominant 1 care are rădăcinile a şi $\bar{a}$ este $g = X^2 - 2\sqrt{3}X + 4$. Nu ne mai rămâne decât să observăm că

$$\begin{aligned} f &= X^4 - 4X^2 + 16 = (X^4 + 8X^2 + 16) - 12X^2 \\ &= (X^2 + 4)^2 - (2\sqrt{3}X)^2 = (X^2 - 2\sqrt{3}X + 4)(X^2 + 2\sqrt{3}X + 4) \\ &= g \cdot (X^2 + 2\sqrt{3}X + 4) \end{aligned}$$

Cum $g(a) = 0$, rezultă că şi $f(a) = 0$.

b) Ne întoarcem la factorizarea obţinută la punctul a):

$$f = g \cdot (X^2 + 2\sqrt{3}X + 4)$$

Ştim că rădăcinile lui g sunt a şi $\bar{a}$, vom determina rădăcinile polinomului de gradul doi $X^2 + 2\sqrt{3}X + 4$. Cu formula uzuală deducem că acestea sunt $-\sqrt{3} - i$ şi $\sqrt{3} + i$. ▼[detalii]

Discriminantul este $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -4 = (2i)^2$ şi rădăcinile sunt $\frac{-2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = -\sqrt{3} \pm i$.

În concluzie rădăcinile lui f sunt

$$\boxed{x_1 = \sqrt{3} - i,\ x_2 = \sqrt{3} + i,\ x_3 = -\sqrt{3} - i,\ x_4 = -\sqrt{3} + i}$$

c) Presupunem că f este reductibil în $\mathbb{Q}[X]$. Atunci există $h \in \mathbb{Q}[X]$ divizor al lui f astfel încât gradul lui h este nenul și strict mai mic decât gradul lui f și cu coeficientul dominant 1.

Distingem cazurile

- dacă gradul lui h este 1 sau 3 atunci h are o rădăcină reală (căci orice polinom cu coeficienți reali de grad impar are cel puțin o rădăcină reală) și în consecință f are o rădăcină reală. Contradicție cu rădăcinile lui f găsite la punctul b).
- dacă gradul lui h este 2, atunci cum h este un divizor cu coeficienti reali, va trebui să fie unul dintre polinoamele $X^2 - 2\sqrt{3}X + 4$ și $X^2 + 2\sqrt{3}X + 4$. Contradicție cu faptul că h are coeficienți raționali.

Contradicțiile obținute demonstrează că presupunerea făcută este falsă.