BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 014

versiune preliminară

1. Problema 1

b) Ştim că a) este în general înainte de b), dar pentru această problemă este mai simplu astfel. Luăm $K = \begin{pmatrix} 1 & m & n \end{pmatrix}$ şi $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$. Se verifică uşor că $K^tL = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ ma & mb & mc \\ na & nb & nc \end{pmatrix} = A$.

a) Să observăm mai întâi că $LK^t = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ n \end{pmatrix} = (a + mb + nc)$ (matrice cu o linie şi o coloană). Notăm $d = a + mb + nc$. Folosind punctul b) şi asociativitatea înmulţirii matricelor, avem $A^2 = A \cdot A = (K^tL)(K^tL) = K^t(LK^t)L = d \cdot K^tL = dA$.

c) Folosim faptul ca matricele pătratice de acelaşi ordin $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sunt una inversa celeilalte, dacă şi numai dacă $AB = I_n$. Este suficient atunci să arătăm că există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $I_3 = (I_3 + A)(xI_3 + yA)$. Dar $(I_3 + A)(xI_3 + yA) = xI_3 + xA + yA + yA^2 \overset{(a)}{=} xI_3 + xA + yA + ydA = xI_3 + (x + y + yd)A$. Este suficient atunci să luăm x, y astfel încât $x = 1$ şi $x + y + yd = 0$, ceea ce revine la $x = 1$ şi $y = -\dfrac{1}{d+1}$. Din enunţ $d \neq -1$, deci $y = -\dfrac{1}{d+1}$ este bine definit.

2. Problema 2

a) Putem face calcule directe, dar preferăm o abordare diferită care ne va ajuta şi la punctul următor. Polinomul f are coeficienţi reali, deci ca să-l admită pe a ca rădăcină, trebuie să aibă şi rădăcina $\bar{a} = \sqrt{3} + i$. Folosind relaţiile lui Viète, cum $a + \bar{a} = 2\sqrt{3}$ şi $a\bar{a} = (\sqrt{3})^2 - i^2 = 4$, polinomul de gradul doi cu coeficientul dominant 1 care are rădăcinile a şi $\bar{a}$ este $g = X^2 - 2\sqrt{3}X + 4$. Nu ne mai rămâne decât să observăm că

$$\begin{aligned} f &= X^4 - 4X^2 + 16 = (X^4 + 8X^21 + 16) - 12X^2 \\ &= (X^2 + 4)^2 - (2\sqrt{3}X)^2 = (X^2 - 2\sqrt{3}X + 4)(X^2 + 2\sqrt{3}X + 4) \\ &= g \cdot (X^2 + 2\sqrt{3}X + 4) \end{aligned}$$

Cum $g(a) = 0$, rezultă că şi $f(a) = 0$.

b) Ne întoarcem la factorizarea obţinută la punctul a):

$$f = g \cdot (X^2 + 2\sqrt{3}X + 4)$$

Ştim că rădăcinile lui g sunt a şi $\bar{a}$, vom determina rădăcinile polinomului de gradul doi $X^2 + 2\sqrt{3}X + 4$. Cu formula uzuală deducem că acestea sunt $-\sqrt{3} - i$ şi $\sqrt{3} + i$. ▼[detalii]

Discriminantul este $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -4 = (2i)^2$ şi rădăcinile sunt $\dfrac{-2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = -\sqrt{3} \pm i$.

În concluzie rădăcinile lui f sunt

$$\boxed{x_1 = \sqrt{3} - i,\ x_2 = \sqrt{3} + i,\ x_3 = -\sqrt{3} - i,\ x_4 = -\sqrt{3} + i}$$

c) Presupunem că h nu este polinomul nul. Atunci gradul lui h este cel puțin 1. Fie $d \in \mathbb{Q}[X]$ polinomul cu coeficientul dominant 1 care este cel mai mare divizor comun al lui f și h. Din faptul că $f(a) = h(a) = 0$, rezultă că $d(a) = 0$. Polinomul cu coeficienți reali d având rădăcina $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, are în mod necesar și rădăcina $\bar{a}$. Atunci d se divide în $\mathbb{R}[X]$ cu polinomul g definit la punctul a).

Distingem cazurile:

- gradul lui d este 2. Atunci d este egal cu g. Contradicție, căci g nu are coeficienți raționali.
- gradul lui d este 3. Atunci d are o rădăcină reală. ▼[detalii]
  Orice polinom de grad impar și cu coeficienți reali are cel puțin o rădăcină reală.

  Cum d divide pe f, rezultă că f are o rădăcină reală. Contradicție, căci am văzut la punctul b) că toate rădăcinile lui f sunt complexe nereale.

Contradicțiile obținute demonstrează că presupunerea făcută este falsă.