

BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 013

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Sistemul având același număr de variabile și ecuații, are soluție unică dacă și numai

dacă determinantul matricei sistemului este nenul. Or matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a sistemului are determinantul

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} && \text{scădem a doua linie din prima și în a treia} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} && \text{dezvoltăm după ultima linie} \\ &= (m-1) \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2(m-1) \end{aligned}$$

Rezultă că sistemul are o soluție unică doar pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Pentru $m \neq 1$ știm de la punctul a) că sistemul este compatibil (este chiar determinat având soluție unică). Ne rămâne deci să studiem cazul $m = 1$, pentru care sistemul devine

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \quad \text{eliminăm a treia ecuație fiind identică cu a doua}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{având o variabilă în plus față de numărul de ecuații, îl alegem pe } z \text{ parametru}$$

$$\begin{cases} x - y = 1 - z \\ x + y = 3 - z \end{cases} \quad \text{adunând ecuațiile îl aflăm pe } x, \text{ scăzându-le îl aflăm pe } y$$

$$\begin{cases} x = 2 - z \\ y = 1 \\ z = z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Deci sistemul este compatibil (nedeterminat căci are o infinitate de soluții) și pentru $m = 1$ și în concluzie este compatibil pentru orice $m \in \mathbb{R}$.

Comentariu. Nu aveam nevoie să facem nici o discuție, observând că $x = 3, y = 1, z = -1$ este soluție indiferent de valoarea lui $m \in \mathbb{R}$. Această observație este suficientă ca rezolvare a acestui punct!

Am preferat să rezolvăm sistemul pentru că vom avea nevoie de forma soluțiilor la punctul următor.

c) Conform punctului precedent $(x, y, z) \in S_1 \Leftrightarrow x = 2 - z, y = 1, z \in \mathbb{R}$ și trebuie să găsim valoarea minimă a expresiei $x^2 + y^2 + z^2 = (2 - z)^2 + 1^2 + z^2 = 2z^2 - 4z + 5 = 2(z - 1)^2 + 3$, unde z poate lua orice valoarea reală. Este suficient să observăm că valoarea minimă a funcției de gradul doi $h(z) = 2(z - 1)^2 + 3$, este $h(1) = 3$, deci valoarea minimă căutată este $\boxed{3}$.

2. Problema 2

a) Prin calcul direct avem

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^6 = B^3 \cdot B^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

b) **Prima soluție.** Pentru ca submulțimea G a unui grup să fie subgrup, este necesar și suficient ca $AB^{-1} \in G$ pentru orice $A, B \in G$. Fie deci $A, B \in G$, adică $\det A = \det B = 1$. Atunci $\det(AB^{-1}) = (\det A)(\det B^{-1}) = \frac{\det A}{\det B} = \frac{1}{1} = 1$, deci $AB^{-1} \in G$.

A doua soluție. Fie $GL_2(\mathbb{C})$ grupul multiplicativ al matricelor inversabile de ordinul doi cu coeficienți complecși. Funcția $\phi : (GL_2(\mathbb{C}), \cdot) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\phi(A) = \det A$ este un morfism în grupul multiplicativ al numerelor complexe nenule. ▼[detalii]

Într-adevăr, $\phi(AB) = \det(AB) = (\det A)(\det B) = \phi(A)\phi(B)$.

Elementul neutru al grupului (\mathbb{C}^*, \cdot) este 1. Este cunoscut că preimaginea printr-un morfism de grupuri a elementului neutru, este un subgrup numit nucleul morfismului. Deci $G = \phi^{-1}(\{1\})$ este un subgrup al lui $GL_2(\mathbb{C})$.

c) Calculăm $C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Presupunem că există

$n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $C^n = I_2$. Să observăm că $C = -I_2 + D$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și

de asemenea că $D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$. Cum $(-I_2)D = D(-I_2)$, putem folosi binomul lui Newton și avem

$$\begin{aligned} C^n &= (-I_2 + D)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-I_2)^{n-k} D^k = \\ &= (-1)^n I_2 + C_n^1 (-I_2)^{n-1} \cdot D + \sum_{k=2}^n (-I_2)^{n-k} \cdot D^2 \cdot D^{k-2} \\ &= (-1)^n I_2 + n(-I_2)^{n-1} \cdot D = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \end{aligned}$$

Contradicția obținută demonstrează că presupunerea făcută este falsă.