

BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 012

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Vom folosi relațiile lui Viète $x_1 + x_2 = -1$ și $x_1x_2 = 1$. Atunci

$$\begin{aligned}
 \det V &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} && \text{scădem prima coloană din a doua și din a treia} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 - 1 & x_2 - 1 \\ 1 & x_1^2 - 1 & x_2^2 - 1 \end{vmatrix} && \text{dezvoltăm după prima linie} \\
 &= \begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 1 \\ (x_1 - 1)(x_1 + 1) & (x_2 - 1)(x_2 + 1) \end{vmatrix} && \text{factor comun pe fiecare din coloane} \\
 &= (x_1 - 1)(x_2 - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 + 1 & x_2 + 1 \end{vmatrix} && \text{calculăm determinantul} \\
 &= [x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1](x_2 + 1 - x_1 - 1) = [1 - (-1) + 1](x_2 - x_1) \\
 &= 3(x_2 - x_1)
 \end{aligned}$$

b) Vom folosi faptul că $x_1^3 - 1 = (x_1 - 1)(x_1^2 + x_1 + 1) = 0 \Rightarrow x_1^3 = 1$. Analog, $x_2^3 = 1$. Atunci

$$\begin{aligned}
 A \cdot V &= \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c + b + a & c + bx_1 + ax_1^2 & c + bx_2 + ax_2^2 \\ a + c + b & a + cx_1 + bx_1^2 & a + cx_2 + bx_2^2 \\ b + a + c & b + ax_1 + cx_1^2 & b + ax_2 + cx_2^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a + b + c & ax_1^2 + bx_1 + c & ax_2^2 + bx_2 + c \\ a + b + c & ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 & ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 \\ a + b + c & ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 & ax_2^4 + bx_2^3 + cx_2^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1g(x_1) & x_2g(x_2) \\ g(1) & x_1^2g(x_1) & x_2^2g(x_2) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

c) Adunând a doua și a treia linie la prima, scoțând factor comun pe $a + b + c$ și apoi dezvoltând cu formula lui Sarrus, avem

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + b + c & a + b + c & a + b + c \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix} \\
 &= (a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix} = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\
 &= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]
 \end{aligned}$$

Se vede ușor acum că $\det A = 0$ dacă și numai dacă primul factor $a + b + c$ este nul, sau al doilea factor este nul ceea ce revine la $a - b = b - c = c - a = 0$, adică $a = b = c$.

2. Problema 2

a) În \mathbb{Z}_5 avem

$$f(\hat{0}) = \hat{0}^n + \hat{4} \cdot \hat{0} = \hat{0}$$

$$f(\hat{1}) = \hat{1}^n + \hat{4} \cdot \hat{1} = \hat{1} + \hat{4} = \hat{0}$$

b) Am văzut la punctul a) că $f(\hat{0}) = f(\hat{1}) = \hat{0}$. Fiecare dintre $f(\hat{2}), f(\hat{3}), f(\hat{4})$ mai poate lua cel mult câte o valoare distinctă dintre $\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}$, deci unul dintre aceste elemente ale lui \mathbb{Z}_5 nu va fi în imaginea lui f . În concluzie f nu este surjectivă.

Reformulare a soluției. Am văzut la punctul a) că f nu este injectivă. Dar o funcție între mulțimi finite cu același număr de elemente este injectivă dacă și numai dacă este surjectivă. În concluzie f nu este surjectivă.

c) Descompunerea în factori primi ireductibili a lui f este

$$f = X^4 + \hat{4}X = X^4 - X = X(X^3 - \hat{1}) = X(X - \hat{1})(X^2 + X + \hat{1}).$$

Pentru a încheia demonstrația trebuie să arătăm că polinomul $g = X^2 + X + \hat{1}$ este ireductibil. Presupunem că g este reductibil. Atunci g are un divizor de gradul întâi și cum \mathbb{Z}_5 este corp, ar rezulta că g are o rădăcină în \mathbb{Z}_5 . Dar

$$g(\hat{0}) = \hat{1} \neq \hat{0}$$

$$g(\hat{1}) = \hat{3} \neq \hat{0}$$

$$g(\hat{2}) = \hat{2} \neq \hat{0}$$

$$g(\hat{3}) = \hat{3} \neq \hat{0}$$

$$g(\hat{4}) = \hat{1} \neq \hat{0}$$

deci g nu are nici o rădăcină în \mathbb{Z}_5 . Contradicția obținută demonstrează că presupunerea făcută este falsă și g este ireductibil.