BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 011

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Pentru $a = c = 1, b = d = 0$, avem

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{adunăm prima linie la a treia şi pe a doua la a patra}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{pentru o matrice triangular superioară, determinantul este produsul elementelor de pe diagonală}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{4}$$

b) Prin calcul direct

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{pmatrix}$$

$$= (a^2+b^2+c^2+d^2)I_4 = \alpha \cdot I_4$$

c) Reamintim că pentru orice matrice pătratice de acelaşi ordin X şi Y avem $\det X = \det X^t$ şi $\det(XY) = (\det X)(\det Y)$. Din relaţia de la punctul b) rezultă că $(\det A)^2 = (\det A)(\det A^t) = \det(A \cdot A^t) = \det(\alpha \cdot I_4) = \alpha^4$. Dar cum A este matrice nenulă, una dintre a, b, c, d este nenulă. În acest caz, $\alpha = a^2+b^2+c^2+d^2 > 0$, deci $(\det A)^2 = \alpha^4 \neq 0$. Rezultă că $\det A \neq 0$ şi în consecinţă A este inversabilă.

2. Problema 2

Vom folosi în rezolvarea problemei două dintre relaţiile lui Viète:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a$$
$$x_1 x_2 x_3 = -c$$

a) Folosind inegalitatea modulelor avem

$$|a| = |-a| = |x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| \leq 1 + 1 = 1 = 3$$

b) Funcţia polinomială $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\phi(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (asociată polinomului f) este continuă pe $\mathbb{R}$, deci are proprietatea lui Darboux. Cum $\phi(0) = c < 0$ şi

$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = \infty$, rezultă că există o rădăcină a lui ϕ și implicit a lui f în intervalul $(0, \infty)$.

c) Cum $c = -1 < 0$, folosind punctul b) rezultă că polinomul are o rădăcină reală pozitivă x_1. Din una din relațiile lui Viète de mai sus, avem $1 \leq |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| = |x_1 x_2 x_3| = |c| = 1$. Rezultă atunci că $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 1$. Dar $x_1 > 0$, deci $x_1 = |x_1| = 1$. Substituind în polinom, folosind și că $a = 1$, deducem $1^3 + 1 \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 1 = 0$, de unde $b = \boxed{-1}$.