

# **BAC 2008**

[www.e-bacalaureat.com](http://www.e-bacalaureat.com)

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 010

versiune definitivă

## 1. Problema 1

a) Calculăm succesiv

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$$

b) Am văzut la punctul precedent că  $\alpha^3 = e$ . Atunci  $\alpha^{2008} = (\alpha^3)^{229} \cdot \alpha = e^{669} \cdot \alpha = \alpha$ . Ecuația de rezolvat se scrie  $\alpha \cdot x = e$ , adică trebuie să aflăm inversa permutării  $\alpha$ . Pentru aceasta ori citim permutarea  $\alpha$  începând de la a doua linie și vom găsi

$x = \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ , sau din relația  $\alpha^3 = e$  scrisă  $\alpha \cdot \alpha^2 = e$  deducem direct că  $x = \alpha^{-1} = \alpha^2$ .

c) Listăm pentru fiecare din cele 6 permutări din  $S_3$  numărul de inversiuni:

- permutarea identică  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  are 0 inversiuni
- permutarea  $\alpha$  are 2 inversiuni, anume (31) și (32)
- permutarea  $\alpha^2$  are 2 inversiuni, anume (21) și (31)
- permutarea  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  are 1 inversiune, anume (21)
- permutarea  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  are 3 inversiuni, anume (32), (31) și (21)
- permutarea  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$  are 1 inversiune, anume (32)

Astfel suma numărului de inversiuni pentru toate permutările din  $S_3$  este  $0 + 2 + 2 + 1 + 3 + 1 = 9$ .

Reamintim că funcția signatură  $\tau : S_3 \rightarrow \{-1, 1\}$ , definită prin  $\tau(\sigma) = (-1)^{m(\sigma)}$ , unde  $m(\sigma)$  este numărul de inversiuni ale permutării  $\sigma$ , este un morfism de grupuri, adică  $\tau(\sigma_1\sigma_2) = \tau(\sigma_1)\tau(\sigma_2)$ . Atunci signatură produsului tuturor permutărilor din  $S_3$  este  $(-1)^{\sum m(\sigma)} = (-1)^9 = -1$ , deci produsul este permutare impară.

## 2. Problema 2

a) Fie  $p$  număr natural prim. Conform teoremei lui Fermat,  $x^p = x$  pentru orice  $x \in \mathbb{Z}_p$ . În cazul particular  $p = 5$  se obține exact enunțul acestui punct.

**Soluție alternativă.** Ca să evitați eventuale depunctări din partea unui corector zelos și unui barem incomplet, puteți pur și simplu examina cele 5 valori din  $\mathbb{Z}_5$ .

Astfel, deoarece  $0^5 = 0$ , avem  $\hat{0}^5 = \hat{0}$ . Deoarece  $1^5 = 1$ , avem  $\hat{1}^5 = \hat{1}$  în  $\mathbb{Z}_5$ . Deasemenea, din  $2^5 = 32 = 6 \cdot 5 + 2$ , rezultă că  $\hat{2}^5 = \hat{2}$  în  $\mathbb{Z}_5$ . Apoi, din  $3^5 = 243 = 48 \cdot 5 + 3$  rezultă că  $\hat{3}^5 = \hat{3}$  în  $\mathbb{Z}_5$ . În final, din  $4^5 = 1024 = 204 \cdot 5 + 4$  rezultă că  $\hat{4}^5 = \hat{4}$  în  $\mathbb{Z}_5$ .

b) Fie  $a \in \mathbb{Z}_5$ . Prin calcul direct avem

$$\begin{aligned} A(a)^2 &= \begin{pmatrix} a & \hat{2} \\ \hat{2} & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \hat{2} \\ \hat{2} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + \hat{4} & \hat{4}a \\ \hat{4}a & a^2 + \hat{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - \hat{1} & -a \\ -a & a^2 - \hat{1} \end{pmatrix} \\ A(a)^4 &= A(a)^2 \cdot A(a)^2 = \begin{pmatrix} a^2 - \hat{1} & -a \\ -a & a^2 - \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 - \hat{1} & -a \\ -a & a^2 - \hat{1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^4 - a^2 + \hat{1} & -\hat{2}a^3 + \hat{2}a \\ -\hat{2}a^3 + \hat{2}a & a^4 - a^2 + \hat{1} \end{pmatrix} \\ A(a)^5 &= A(a)^4 \cdot A(a) = \begin{pmatrix} a^4 - a^2 + \hat{1} & -\hat{2}a^3 + \hat{2}a \\ -\hat{2}a^3 + \hat{2}a & a^4 - a^2 + \hat{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \hat{2} \\ \hat{2} & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^5 - a^3 + a - \hat{4}a^3 + \hat{4}a & \hat{2}a^4 - \hat{2}a^2 + \hat{2} - \hat{2}a^4 + \hat{2}a^2 \\ \hat{2}a^4 - \hat{2}a^2 + \hat{2} - \hat{2}a^4 + \hat{2}a^2 & a^5 - a^3 + a - \hat{4}a^3 + \hat{4}a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^5 & \hat{2} \\ \hat{2} & a^5 \end{pmatrix} \stackrel{(a)}{=} \begin{pmatrix} a & \hat{2} \\ \hat{2} & a \end{pmatrix} = A(a) \end{aligned}$$

**Soluție alternativă.** Scriem matricea  $A$  ca suma a două matrice de o formă particulară. Avem într-adevăr  $A = aI_2 + B$ , unde  $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{0} \end{pmatrix}$ .

Să observăm că  $B^2 = \hat{4}I_2 = -I_2$  și de aici  $B^4 = I_2$  și  $B^5 = B$ . Cum  $C_5^1 = C_5^4 = 5$  și  $C_5^2 = C_5^3 = 10$ , în dezvoltarea binomului lui Newton (putem s-o folosim căci  $(aI_2)B = B(aI_2)$ ) pentru  $A(a)^5 = (aI_2 + B)^5$  toți termenii vor fi nuli (suntem în  $\mathbb{Z}_5$ ) cu excepția primului și ultimului. Astfel  $A(a)^5 = (aI_2)^5 + B^5 = a^5I_2 + B \stackrel{(a)}{=} aI_2 + B = A(a)$ .

c) Fie  $a \in \mathbb{Z}_5$ . Folosind de mai multe ori la rând punctul b) avem

$$\begin{aligned} (A(a))^{125} &= (((A(a))^5)^5)^5 = A(a) \\ (A(a))^{625} &= (((((A(a))^5)^5)^5)^5)^5 = A(a) \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} (A(a))^{2008} &= ((A(a))^{625})^3 \cdot (A(a))^{125} \cdot (A(a))^8 \\ &= (A(a))^3 \cdot A(a) \cdot (A(a))^8 = (A(a))^{12} = ((A(a))^5)^2 \cdot (A(a))^2 \\ &= (A(a))^2 \cdot (A(a))^2 = (A(a))^4 \end{aligned}$$

Trebuie atunci să determinăm valorile lui  $a \in \mathbb{Z}_5$  pentru care  $(A(a))^4 = A(a)$ .

Înmulțind cu  $A(a)$ , obținem  $A(a) = (A(a))^5 = (A(a))^2$ . Egalând elementele ce se găsesc pe prima linie și a doua coloană a matricelor  $A(a)$  și  $(A(a))^2$ , obținem  $\hat{2} = -a$ , de unde în mod necesar  $a = \boxed{\hat{3}}$ .

Deoarece  $\det A(\hat{3}) = (\hat{3})^2 - (\hat{2})^2 = \hat{0}$ , matricea  $A(\hat{3})$  nu este inversabilă. Relația  $(A(\hat{3}))^2 = A(\hat{3})$  nu este atunci echivalentă cu  $(A(\hat{3}))^4 = A(\hat{3})$ , ci doar o consecință. Rămâne deci să verificăm direct egalitatea celor două matrice. Folosind forma matricei  $(A(a))^4$  din calculul de la punctul b), avem

$$(A(\hat{3}))^4 = \begin{pmatrix} \hat{3}^4 - \hat{3}^2 + \hat{1} & -\hat{2} \cdot \hat{3}^3 + \hat{2} \cdot \hat{3} \\ -\hat{2} \cdot \hat{3}^3 + \hat{2} \cdot \hat{3} & \hat{3}^4 - \hat{3}^2 + \hat{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{3} \end{pmatrix} = A(\hat{3})$$

Deci  $a = \boxed{3}$  este sigura valoare din  $\mathbb{Z}_5$  care satisface relația din enunț.