# BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 009

versiune definitivă

## 1. Problema 1

a) Prin calcul direct

$$\begin{aligned} A^2 &= A\cdot A\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\\ A^3 &= A\cdot A^2=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\\ A^4 &= A^2\cdot A^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

După cum se observă nu avem nevoie de calculul lui $A^3$ pentru a afla $A^4$, dar îl vom folosi la punctul c).

b) Fie $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Efectuând înmulțirile, avem

$$\begin{aligned} BE_1 &= \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{pmatrix}\\ E_1B &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Observăm că $E_1B=BE_1$ dacă și numai $b=0$ și $d=a$. Matricea $B$ este deci de forma $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ c & a\end{pmatrix}$. Efectuând iar înmulțirile avem

$$\begin{aligned} BE_2 &= \begin{pmatrix}a & 0\\ c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a\\ c & c+a\end{pmatrix}\\ E_2B &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & a\\ c & a\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Egalitatea $BE_2=E_2B$ este echivalentă cu $c=0$. Rezultă că $B=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$.

c) Din enunț rezultă în particular că $A^nE_i=E_iA^n$, pentru orice $i\in\{1,2\}$. Folosind punctul b) rezultă că există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^n=aI_2$. Fie $p\in\{0,1,2,3\}$ restul împărțirii lui $n$ la $4$. Există $k\in N$ astfel încât $n=4k+p$. Am văzut la punctul a) că $A^4=-4I_2$. Dacă $p\neq 0$, atunci $A^n=(A^4)^k\cdot A^p=(-4)^kA^p$. Examinând forma lui $A, A^2, A^3$ vedem că egalitatea $aI_2=A^n=(-4)^kA^p$ este imposibilă. Se impune deci $p=0$ și astfel $n=4k$. Cum $n\in\mathbb{N}^*$, rezultă și $k\in\mathbb{N}^*$.

## 2. Problema 2

a) Polinomul se scrie

$$\begin{aligned} f &= 2X^4+3X^2-5=2X^4-2+3X^2-3\\ &= 2(X^2-1)(X^2+1)+3(X^2-1)=(X^2-1)(2X^2+5)\end{aligned}$$

Rezolvând ecuațiile de gradul doi $x^2-1=0$ și $2x^2+5=0$ găsim rădăcinile

$\boxed{x_1=1, x_2=-1, x_3=\sqrt{\frac{5}{2}}i, x_4=-\sqrt{\frac{5}{2}}i}$.

b) Vom folosi relațiile lui Viète

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4 &= -\frac{a}{2} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4 &= \frac{3}{2} \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4 &= -\frac{b}{2} \\ x_1x_2x_3x_4 &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned} & (x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2 \\ = \ & 3(x_1^2+x_2^2+x_3+x_4^2)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4) \\ = \ & 3(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-8(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4) \\ = \ & 3\cdot\frac{a^2}{4}-8\cdot\frac{3}{2}=\frac{3(a^2-16)}{4} \end{aligned}$$

c) Folosind punctul b), avem $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2=0$. Pentru ca toate rădăcinile să fie reale se impune ca $x_1=x_2=x_3=x_4$. În acest caz folosind prima relație a lui Viète avem $4x_1=x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{-4}{2}=-2$, de unde rezultă că $x_1=x_2=x_3=x_4=-\frac{1}{2}$.
Substituind în a treia relație a lui Viète avem $4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{b}{2}$, de unde $b=\boxed{1}$.
Analog, din a patra relație a lui Viète avem $\left(-\frac{1}{2}\right)^4=\frac{c}{2}$ și de aici $c=\boxed{\frac{1}{8}}$.