BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul II

Rezolvările variantei 008

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Avem

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} && \text{Adunăm prima linie la a doua} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} && \text{dezvoltăm după a doua linie} \\
&= (-2)(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot [1 \cdot (-1) - (-1)(-1)] = \boxed{-4}
\end{aligned}$$

b) Deoarece $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, avem

$$\begin{aligned}
A^2 - A - 2I_3 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3
\end{aligned}$$

c) Scriem relația de la punctul b) sub forma $A(A - I_3) = 2I_3 \Leftrightarrow A\left[\frac{1}{2}(A - I_3)\right] = I_3$

și de aici rezultă că inversa matricei A este $\boxed{\frac{1}{2}(A - I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}}$

2. Problema 2

a) Conform relațiilor lui Viète avem

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\
x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= -1 \\
x_1x_2x_3 &= -a
\end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned}
(x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) &= x_1x_2x_3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + (x_1 + x_2 + x_3) + 1 \\
&= -a - 1 + 0 + 1 = \boxed{-a}
\end{aligned}$$

b) Dacă $x_1 = 2$ atunci $2^3 - 2 + a = 0 \Leftrightarrow a = -6$. Membrul stâng al ecuației se scrie

$$\begin{aligned}
x^3 - x - 6 &= (x^3 - 8) - (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - (x - 2) \\
&= (x - 2)(x^2 + 2x + 3)
\end{aligned}$$

b și observăm că x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuației de gradul doi $x^2 + 2x + 3 = 0$. Discriminantul acestei ecuații este $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8 = (2i\sqrt{2})^2$, deci $\boxed{x_2 = -1 + 2i\sqrt{2},\ x_3 = -1 - 2i\sqrt{2}}$.

c) Observația esențială este că $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3) = 0^2 - 2 \cdot (-1) = 2$. Atunci una dintre rădăcinile întregi x_1, x_2, x_3 trebuie să fie 0 și $0^3 - 0 + a = 0 \Rightarrow a = \boxed{0}$. ▼[detalii]

Într-adevăr, dacă toate rădăcinile sunt nenule, atunci $x_1^2 \geq 1, x_2^2 \geq 1, x_3^2 \geq 1$ și prin adunare avem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 3$.

Nu mai rămâne decât să verificăm că pentru $a = 0$, rădăcinile sunt într-adevăr numere întregi, căci ecuația $x^3 - x = 0$ are rădăcinile $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.