BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul III

Rezolvările variantei 024

versiune preliminară

1. Problema 1

a) Funcţia g este continuă ca sumă de funcţii continue. În plus, $|g(x)-\arcsin x| = |x^3| = |x|\cdot x^2 \leq 1\cdot x^2$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

b) Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, fie $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^2}{n}+\arcsin x$. Aceste funcţii sunt continue ca sume de funcţii continue, iar $|f_n(x)-\arcsin x| = \left|\frac{x^2}{n}\right| = \frac{1}{n}x^2 \leq 1\cdot x^2 = x^2$, pentru orice $x\in[-1,1]$. Prin urmare $f_n\in A$ pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, deci A este infinită.

c) Fie $f\in A$. Atunci $|f(0)-\arcsin 0|\leq 0^2 \Rightarrow f(0)=\arcsin 0=0$. Pentru orice $x\neq 0$ avem $0\leq\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{\arcsin x}{x}\right| = \frac{|f(x)-\arcsin x|}{|x|}\leq\frac{x^2}{|x|}=\frac{|x|^2}{|x|}=|x|$. Cum $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ şi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$, trecând la limită în inegalitatea de mai sus, obţinem $0\leq\left|\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-1\right|\leq 0$, deci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$. Dar această limită se poate scrie $1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$, deci f este derivabilă în $x=0$.

2. Problema 2

a) Fie $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}(x)=\begin{cases}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$. Using l'Hopital's rule, we have $\lim\limits_{x\to 0}\tilde{f}(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+2e^{-2x}}{1}=-1+2=1=f(0)$, deci $\tilde{f}$ este continuă în $x=0$. Cum $\tilde{f}$ este continuă pe $\mathbb{R}^*$, rezultă că este continuă pe $\mathbb{R}$ şi prin urmare admite primitive. Ca o consecinţă , f care este restricţia lui $\tilde{f}$ la $[0,\infty)$ are de asemenea primitive.

b) Să observăm că $xf(x)=\begin{cases}x\cdot\frac{e^{-x}-e^{-2x}}{x}, & x>0\\ 0\cdot 1, & x=0\end{cases}$ se poate scrie sub forma $e^{-x}-e^{-2x}$ pentru orice $x\in[0,\infty)$. Atunci $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(e^{-x}-e^{-2x})dx = \left(-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^1 = \left(-e^{-1}+\frac{1}{2}e^{-2}\right)-\left(-e^0+\frac{1}{2}e^0\right)=\frac{e^{-2}-2e^{-1}+1}{2}= \boxed{\frac{(e^{-1}-1)^2}{2}}$.

(1) Evident $f(t)\geq 0$, $\forall t\in[0,\infty)$. Demonstrăm că $f(t)\leq e^{-t}$ pentru orice $t\in[0,\infty)$. Pentru $t=0$, avem $f(0)=1=e^{-0}$. Dacă $t>0$, atunci $f(t)=\frac{e^{-t}(1-e^{-t})}{t}$. Conform inegalităţii oferite ca indicaţie în enunţ, avem $e^{-t}\geq -t+1 \Leftrightarrow t\geq 1-e^{-t}\Leftrightarrow\frac{1-e^{-t}}{t}\leq 1$, pentru orice $t>0$. De aici, $f(t)\leq e^{-t}$, $\forall t>0$.

Fie $x > 0$. Integrând inegalitățile $0 \leq f(t) \leq e^{-t}$, $\forall t \in [0, t]$, obținem $0 \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^x = -e^{-x} + 1 < 1$.