

BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul III

Rezolvările variantei 023

versiune preliminară

1. Problema 1

Vom prezenta două rezolvări ale acestei probleme, astfel o puteți alege pe cea a cărei abordare vă este mai familiară.

Prima rezolvare.

- a) Să notăm că f este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Rezultă că f este strict crescătoare pe \mathbb{R} și în particular injectivă. Astfel ecuația $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$ are cel mult o soluție.

Pe de altă parte, observăm că $f(1) = 3 < 3 + \frac{1}{n+1} < 11 = f(2)$. Funcția f fiind continuă are proprietatea lui Darboux, deci există un unic $x_n \in (1, 2)$ astfel ca $f(x_n) = 3 + \frac{1}{n+1}$.

- b) Am văzut la punctul a) că $x_n \in (1, 2)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit. Fie $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $f(x_n) = 3 + \frac{1}{n+1} > 3 + \frac{1}{n+2} > 3 = f(1)$, folosind iar proprietatea lui Darboux rezultă că $1 < x_{n+1} < x_n$. Am demonstrat astfel că șirul este strict descrescător. Fiind monoton și mărginit, conform teoremei lui Weierstrass, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent. Fie $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Trecând la limită în relația $f(x_n) = 3 + \frac{1}{n+1}$, obținem $l^3 + l + 1 = 3 \Leftrightarrow (l-1)(l^2 + l + 2) = 0$. Cum ecuația de gradul doi $l^2 + l + 2 = 0$ nu are rădăcini reale, rezultă că $l = 1$.
- c) Vom rescrie relația de definiție a lui x_n astfel:

$$\begin{aligned} x_n^3 + x_n + 1 &= 3 + \frac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow (x_n^3 - 1) + (x_n - 1) &= \frac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow (x_n - 1)(x_n^2 + x_n + 1) + (x_n - 1) &= \frac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow n(x_n - 1) &= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{x_n^2 + x_n + 2} \end{aligned}$$

Folosind faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) = \boxed{\frac{1}{4}}$.

A doua rezolvare.

- a) Vom demonstra că f este bijectivă.

Injectivitatea: Deoarece $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare pe \mathbb{R} . Ca o consecință, f este injectivă.

Surjectivitatea: Funcția f este continuă, deci are proprietatea lui Darboux. Calculăm limitele următoare

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x + 1) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + x + 1) = \infty \end{aligned}$$

Atunci f ia toate valorile dintre $-\infty$ și ∞ , deci f este surjectivă.

Fiind bijectivă, funcția f este inversabilă. Fie $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, inversa funcției f .

Cum f este inversabilă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ecuația $f(x) = 3 + \frac{1}{n+1}$ are unica soluție $x_n = f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right)$.

- b) Cum $f'(x) = 3x^2 + 1 \neq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, conform teoremei de derivare a inversei unei funcții, rezultă că f^{-1} este derivabilă pe \mathbb{R} și $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În particular, f^{-1} este continuă. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right) = f^{-1}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n+1}\right)\right) = f^{-1}(3) = 1$$

▼[detalii]

Am folosit în final faptul că $f(1) = 3 \Leftrightarrow f^{-1}(3) = 1$.

- c) Reamintim că $x_n = f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right)$ și că $f^{-1}(1) = 3$. Atunci folosind definiția derivatei lui f^{-1} în punctul $3 = f(1)$, avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}\left(3 + \frac{1}{n+1}\right) - f^{-1}(3)}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= (f^{-1})'(3) \cdot 1 = (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3 \cdot 1^2 + 1} = \boxed{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

2. Problema 2

- a) Considerăm funcția $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \ln(1+x) - f(x)$. Cum funcția $[0, \infty) \ni t \rightarrow \frac{\sin t}{1+t} \in \mathbb{R}$ este continuă, conform teoremei Leibniz-Newton funcția f este derivabilă pe $(0, \infty)$ și continuă pe $[0, \infty)$. Rezultă că g este derivabilă pe $(0, \infty)$ și continuă pe $[0, \infty)$. Folosind iar teorema Leibniz-Newton calculăm derivata lui f și deducem $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{\sin x}{1+x} = \frac{1 - \sin x}{1+x} > 0$, pentru orice real cu excepția mulțimii izolate $\{2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{N}\}$. Rezultă că g este strict crescătoare pe $[0, \infty)$ și ca urmare $g(x) > g(0) = 0$, pentru orice $x > 0$. Iar această ultimă inegalitate este exact inegalitatea din enunț.
- b) Am folosit deja la punctul a) că $f'(x) = \frac{\sin x}{1+x}$, $\forall x > 0$. Deoarece $1+x > 0$ pentru $x > 0$, semnul acestei derivate este dat de semnul lui $\sin x$ și în concluzie
- $f'(x) > 0$ pe intervalele de forma $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$ și implicit f este strict crescătoare pe intervalele de forma $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$, $k \in \mathbb{N}$
 - $f'(x) < 0$ pe intervalele de forma $(2k\pi + \pi, 2(k+1)\pi)$ și implicit f este pe intervalele de forma $[2k\pi + \pi, 2(k+1)\pi]$, $k \in \mathbb{N}$
- c) Știm de la punctul b) că f este strict crescătoare pe intervalul $[0, \pi]$ și strict descrescătoare pe $[\pi, 2\pi]$. Atunci valoarea minimă a lui f este $f(0)$ sau $f(2\pi)$. Vom demonstra că $f(2\pi) \geq f(0) = 0$, de unde rezultă că $f(0) = 0$ este valoarea

minimă a funcției f pe intervalul $[0, 2\pi]$. Avem

$$\begin{aligned}
 f(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt && \text{schimbare de variabilă } t = u + \pi \text{ în a doua integrală} \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+t} dt + \int_0^{\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{1+u+\pi} du && \text{schimbare } t = u \text{ în prima integrală, } \sin(u+\pi) = -\sin u \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{1+u} du - \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{1+u+\pi} du \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin u}{(1+u)(1+u+\pi)} du
 \end{aligned}$$

Cum $\frac{\pi \sin u}{(1+u)(1+u+\pi)} \geq 0$ pentru orice $u \in [0, \pi]$, integrând pe intervalul $[0, \pi]$

rezultă că $f(2\pi) = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin u}{(1+u)(1+u+\pi)} du \geq 0$, ceea ce încheie demonstrația.