

BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul III

Rezolvările variantei 022

versiune preliminară

1. Problema 1

a) Funcția f este derivabilă pe \mathbb{R} . Folosind formula de derivare a unui cât, avem

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^4 + 3) - x(4x^3)}{(x^4 + 3)^2} = \frac{3(1 - x^4)}{(x^4 + 3)^2}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

b) Cum semnul lui $f'(x) = \frac{3(1 - x^2)(1 + x^2)}{(x^4 + 3)^2}$ este dat de semnul lui $1 - x^2$, avem

$$f'(x) \begin{cases} < 0, & x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ > 0, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Observăm că $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. ▼[detalii]

Funcția f este rațională cu gradul numitorului mai mare decât gradul numărătorului.

De asemenea, $f(-1) = -\frac{1}{4}$, iar $f(1) = \frac{1}{4}$. Variația lui f poate fi sintetizată în următorul tabel:

x	$-\infty$	-1	1	∞
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	0	$\searrow -\frac{1}{4}$	$\nearrow \frac{1}{4}$	0

Valoarea minimă a lui f este $-\frac{1}{4}$, iar valoarea maximă este $\frac{1}{4}$. În plus f este continuă, deci are proprietatea lui Darboux și va lua toate valorile dintre $-\frac{1}{4}$ și $\frac{1}{4}$.

Prin urmare, imaginea lui f este $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $|1 - x^4| \leq 1$ și $\frac{1}{(x^4 + 3)^2} \leq \frac{1}{9}$. Atunci $|f'(x)| =$

$$\frac{3|1 - x^4|}{(x^4 + 3)^2} \leq \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Fie $x, y \in \mathbb{R}$ fixate. Dacă $x = y$, atunci inegalitatea din enunț este evidentă. Studiem cazul când $x \neq y$. Putem presupune fără restrângerea generalității că $x < y$. Cum f este continuă pe intervalul $[x, y]$ și derivabilă pe (x, y) , conform teoremei lui Lagrange, există $c \in (x, y)$ astfel încât $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. Atunci $|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y| \leq \frac{1}{3}|x - y| \leq |x - y|$.

2. Problema 2

a) Avem

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (f(x) - 2)e^{x^2} dx &= \int_0^1 (x^3 - 3x)e^{x^2} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 2x(x^2 - 3)e^{x^2} dx && \text{schimbare de variabilă } y = x^2 \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (y - 3)e^y dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (y - 3)(e^y)' dy && \text{integrare prin părți} \\
&= \frac{1}{2} (y - 3)e^y \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^y dy \\
&= -e + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} e^y \Big|_0^1 = \boxed{2 - \frac{3e}{2}}
\end{aligned}$$

b) Pentru calculul acestei integrale avem nevoie să scriem funcția rațională de integrat în fracții simple. Descompunem mai întâi numitorul

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) \\
&= (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2(x + 2)
\end{aligned}$$

Căutăm $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel ca pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ să avem

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + 4}{x^3 - 3x + 2} &= \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{(x - 1)^2} + \frac{c}{x + 2} \\
&= \frac{a(x - 1)(x + 2) + b(x + 2) + c(x - 1)^2}{(x - 1)^2(x + 2)} \\
&= \frac{a(x^2 + x - 2) + b(x + 2) + c(x^2 - 2x + 1)}{(x - 1)^2(x + 2)} \\
&= \frac{(a + c)x^2 + (a + b - 2c)x + (-2a + 2b + c)}{(x - 1)^2(x + 2)}
\end{aligned}$$

Identificând numărătorii, obținem sistemul

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ a + b - 2c = 0 \\ -2a + 2b + c = 4 \end{cases}$$

Adunând toate ecuațiile obținem $3b = 5$, de unde $b = \frac{5}{3}$. Substituind această valoare a lui b , primele două ecuații ale sistemului devin

$$\begin{cases} a = c = 1 \\ a - 2c = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Scăzând din prima ecuație pe cea de a doua, obținem $c = \frac{8}{9}$. Substituind în oricare din cele două ecuații găsim și $a = \frac{1}{9}$.

Integrala din enunț se scrie atunci

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{x^2 + 4}{f(x)} dx &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \left(\frac{1}{9} \ln|x-1| - \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{8}{9} \ln|x+2| \right) \Big|_{-1}^0 \\ &= \boxed{\frac{7}{9} \ln 2 + \frac{5}{6}}\end{aligned}$$

- c) Funcția g este derivabilă fiind primitiva unei funcții continue și avem $g'(x) = f(x)e^{x^2} = (x-1)^2(x+2)e^{x^2}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Singurul punct unde derivata se anulează și are și schimbare de semn este $x = -2$. Pentru $x < -2$ avem $g'(x) < 0$ și pentru $x > -2$ avem $g'(x) > 0$, deci în $x = \boxed{-2}$ funcția g are un minim global. **Comentariu.** Bănuim că prin 'puncte de extrem', ni se cer de fapt abscisele punctelor de extrem. Valoarea lui $g(-2)$ nu se poate calcula fără metode de aproximare numerică.