BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul III

Rezolvările variantei 020

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Deoarece $f'(x) = 2e^x + 6x - 2 = 6x + 2(e^x - 1) > 0$, pentru orice $x > 0$, rezultă că f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

b) Deoarece $f(x) = 2e^x + 2x^2 + 4 + (x^2 - 2x + 1) = 2e^x + 2x^2 + 4 + (x - 1)^2 > 2 \cdot 0 + 0 + 4 + 0 = 4$, iar codomeniul lui f este $\mathbb{R}$, funcția f nu este surjectivă.

c) Aducem la o formă mai simplă expresia de sub radicalul de ordinul 3, expresie pe care o notăm S

$$\begin{aligned}
S &= f(-1) + f(-2) + f(-3) + \ldots + f(-n) = \sum_{k=1}^{n} f(-k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (2e^{-k} + 3k^2 + 2k + 5) = 2\sum_{k=1}^{n} e^{-k} + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 5 \\
&= 2e^{-1} \cdot \frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}} + 3 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 5n \\
&= 2\frac{1 - e^{-n}}{e - 1} + n^3 + \frac{5}{2}n^2 + \frac{13}{2}n
\end{aligned}$$

Amplificând cu conjugatul, avem

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{S} - n &= \frac{S - n^3}{\sqrt[3]{S^2} + n\sqrt[3]{S} + n^2} = \frac{2\frac{1 - e^{-n}}{e - 1} + \frac{5}{2}n^2 + \frac{13}{2}n}{n^2\left[\left(\frac{\sqrt[3]{S}}{n}\right)^2 + \frac{\sqrt[3]{S}}{n} + 1\right]} \\
&= \frac{\frac{2(1 - e^{-n})}{n^2(e - 1)} + \frac{5}{2} + \frac{13}{2n}}{\left(\frac{\sqrt[3]{S}}{n}\right)^2 + \frac{\sqrt[3]{S}}{n} + 1}
\end{aligned}$$

Observând că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{S}}{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\frac{2(1 - e^{-n})}{n^3(e - 1)} + 1 + \frac{5}{2n} + \frac{13}{2n^2}} = 1$$

rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{S} - n\right) = \boxed{\frac{5}{6}}$.

2. Problema 2

a) Avem $\displaystyle\int_0^1 (t^3 + 1)f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1}dt = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

b) Fie $x > 0$. Cu schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{s}$ avem

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)dt &= \int_{x}^{1} f\left(\frac{1}{s}\right)\left(-\frac{1}{s^2}\right)ds = \int_{1}^{x} \frac{1}{s^2\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\left(1+\frac{1}{s^3}\right)}ds \\ &= \int_{1}^{x} \frac{s^3}{(s^2+1)(s^3+1)}ds = \int_{1}^{x} t^3 f(t)dt\end{aligned}$$

c) Fie $x > 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{x}}^{x} f(t)dt &= \int_{\frac{1}{x}}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt \overset{(b)}{=} \int_{1}^{x} t^3 f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt \\ &= \int_{1}^{x} (t^3+1)f(t)dt = \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2+1}dt = \operatorname{arctg} t\Big|_{1}^{x} = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 1\end{aligned}$$

Atunci limita din enunț este $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.