BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul III

Rezolvările variantei 019

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Domeniul lui f fiind mărginit atât superior cât și inferior, nu are sens să discutăm despre asimptote orizontale sau oblice la graficul lui f. Funcția f este continuă pe domeniul de definiție, deci nu putem avea asimptote verticale decât în $x = -2$ și $x = 2$. Cum $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \infty$, rezultă că $\boxed{x = -2}$ și $\boxed{x = 2}$ sunt asimptote verticale la graficul lui f.

b) Funcția f este indefinit derivabilă pe domeniul de definiție și pentru orice $x \in (-2, 2)$ avem

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln(2+x) - \ln(2-x))' = \frac{1}{2+x} - \frac{-1}{2-x} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)^2} \end{aligned}$$

Singurul punct în care $f''(x)$ se anulează și schimbă semnul, deci singurul punct de inflexiune, este evident $x = \boxed{0}$.

c) Fie $a \in \mathbb{R}$. Scriem limita din enunț sub o formă mai simplă

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} x^a f\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x \to \infty} x^a \ln \frac{2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} x^a \ln\left(1 + \frac{2}{2x-1}\right) \\ &= \lim_{x \to \infty} x^{a-1} \cdot \frac{2x}{2x-1} \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)}{\frac{2}{2x-1}} \end{aligned}$$

Limita celui al doilea factor este 1 și folosind limita clasică $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$, limita celui al treilea factor este tot 1. Rezultă că

$$\lim_{x \to \infty} x^a f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to \infty} x^{a-1} = \begin{cases} 0 & , \text{ dacă } a < 1 \\ 1 & , \text{ dacă } a = 1 \\ \infty & , \text{ dacă } a > 1 \end{cases}$$

2. Problema 2

Să observăm că $f(x) = \dfrac{-x^3 - 4x + 2x^2 + 8 - x}{x^2 + 4} = -x + 2 - \dfrac{x}{x^2+4}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) Folosind observația de mai sus, avem

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \left(-\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\right)\Big|_0^1 = \left(-\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2}\ln 5\right) - \left(-\frac{1}{2}\ln 4\right) \\ &= \boxed{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{5}} \end{aligned}$$

b) Folosim iar observaţia iniţială şi apoi integrăm prin părţi

$$\begin{aligned}
\int_1^4 (x+f(x)-2)^2 dx &= \int_1^4 \frac{x^2}{(x^2+4)^2}dx = \int_1^4 \frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+4)^2}dx \\
&= \int_1^4 \frac{x}{2}\left(-\frac{1}{x^2+4}\right)' dx = -\frac{x}{2(x^2+4)}\Big|_1^4 + \int_1^4 \frac{1}{2(x^2+4)}dx \\
&= -\frac{4}{2(16+4)} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_1^4 \\
&= \boxed{\frac{1}{4}\operatorname{arctg} 2 - \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

c) Cum $f(0)=2$ şi $f(1)=\frac{4}{5}$, făcând schimbarea de variabilă $x=f(t)$, avem

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{4}{5}}^2 f^{-1}(x)dx &= \int_1^0 f^{-1}(f(t))f'(t)dt = -\int_0^1 tf'(t)dt \\
&= -tf(t)\Big|_0^1 + \int_0^1 f(t)dt \overset{(a)}{=} -f(1) + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{5} = \boxed{\frac{7}{10} + \frac{1}{2}\ln\frac{4}{5}}
\end{aligned}$$