

# **BAC 2008**

[www.e-bacalaureat.com](http://www.e-bacalaureat.com)

Programa MT1, Subiectul III

Rezolvările variantei 018

versiune definitivă

## 1. Problema 1

- a) Cum funcția  $f$  este continuă pe tot domeniul de definiție, iar punctul  $x = -2$  unde numitorul se anulează nu este punct de acumulare pentru domeniul de definiție  $[0, \infty)$ , rezultă că nu există nici o asimptotă verticală la graficul lui  $f$ . Deoarece  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ , graficul lui  $f$  admite asimptota orizontală  $y = 2$  spre  $\infty$ .
- b) Demonstrăm că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este mărginit, mai exact vom arăta prin inducție că  $0 < x_n \leq 2$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

*Verificarea.* Conform enunțului  $0 < 2 = x_0 \leq 2$ .

*Pasul de inducție.* Presupunem că  $0 < x_n \leq 2$ . Atunci  $x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2} > 0$  și  $x_{n+1} - 2 = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2} - 2 = \frac{-3}{x_n + 2} < 0$ , deci  $x_{n+1} < 2$ . Conform principiului inducției matematice,  $x_n \in (0, 2]$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

Să observăm că  $f$  este strict crescătoare pe  $[0, \infty)$ , căci  $f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ , pentru orice  $x > 0$ .

Calculăm  $x_1 = \frac{2x_0 + 1}{x_0 + 2} = \frac{5}{4}$  și notăm că  $x_0 > x_1$ . Demonstrăm acum prin inducție că  $x_{n+1} < x_n$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

*Verificarea.* Am văzut că  $x_1 = \frac{5}{4} < 2 = x_0$ .

*Pasul de inducție.* Presupunem că  $x_{n+1} < x_n$ . Folosind faptul că  $f$  este strict crescătoare, rezultă că  $x_{n+2} = f(x_{n+1}) < f(x_n) = x_{n+1}$ . Conform principiului inducției matematice, rezultă că șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este strict descrescător.

Fiind monoton și mărginit, șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent. Fie  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Trecând la limită în relația de recurență obținem  $l = \frac{2l + 1}{l + 2} \Leftrightarrow l^2 = 1$ . Cum șirul are toți termenii pozitivi, rezultă că  $l \geq 0$  și din ecuația  $l^2 = 1$ , avem  $l = 1$ .

- c) Cum șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge strict descrescător la 1, rezultă că  $x_n > 1$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Atunci

$$0 < x_{n+1} - 1 = \frac{2x_n + 1}{x_n + 2} - 1 = \frac{x_n - 1}{x_n + 2} < \frac{x_n - 1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

De aici se arată ușor (prin inducție de exemplu) că  $0 < x_n - 1 < \frac{x_0 - 1}{3^n} = \frac{1}{3^n}$ .

Șirul  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este strict crescător, deoarece  $y_{n+1} - y_n = x_{n+1} - 1 > 0$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . De aici rezultă  $y_n \geq y_0$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ . Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} y_n &= x_0 + (x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_n - 1) \\ &< x_0 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} < 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Am demonstrat că șirul  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este monoton și mărginit. În consecință, este și convergent.

**2. Problema 2**

a) Avem  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)dx = (x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$ .

b) Fie  $x \in \mathbb{R}$ . Cum  $\int_0^x f(t)dt = (t + \sin t)\Big|_0^x = x + \sin x$ , avem  $F(x) = x(x + \sin x)$ .  
Atunci  $F(-x) = (-x)(-x + \sin(-x)) = x(x + \sin x) = F(x)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ ,  
adică  $F$  este funcție pară.

c) Considerăm funcția  $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x + \sin x$ . Cum  $g'(x) = 1 + \cos x > 0$   
pentru orice  $x > 0$  cu excepția mulțimii izolate de puncte  $\left\{2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{N}\right\}$ ,  
rezultă că  $g$  este strict crescătoare pe  $[0, \infty)$ . În plus, avem și  $g(x) \geq g(0) = 0$ ,  $\forall x \geq 0$ .  
Funcția  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x$  este de asemenea strict crescătoare și pozitivă.  
Produsul a două funcții strict crescătoare și pozitive este strict crescătoare, deci  $F(x) = h(x)g(x)$  este strict crescătoare pe  $[0, \infty)$ .  
Știm de la punctul b) că  $F$  este o funcție pară, deci deducem că  $F$  este strict descrescătoare pe  $(-\infty, 0]$ .