BAC 2008

Programa MT1, Subiectul III

Rezolvările variantei 017

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Demonstrăm prin inducție după $n \in \mathbb{N}^*$ că $x_n \in (0,1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
Verificarea. Conform enunțului $x_1 \in (0,1)$.

Pasul de inducție. Presupunem că $x_n \in (0,1)$. Atunci $x_{n+1} = \dfrac{x_n^5 + 3x_n}{4} > 0$ și $x_{n+1} = \dfrac{x_n^5 + 3x_n}{4} < \dfrac{1^5 + 3 \cdot 1}{4} = 1$.

Conform principiului inducției $x \in (0,1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Deoarece $x_{n+1} - x_n = \dfrac{x_n^5 + 3x_n}{4} - x_n = \dfrac{x_n(x_n^4 - 1)}{4} < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător. Știm deja de la punctul a) că șirul este mărginit, deci conform teoremei lui Weierstrass este convergent.

c) Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Din faptul că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict descrescător rezultă că $x_n \leq x_1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită în inegalitățile $0 < x_n \leq x_1$, $\forall n \in N^*$, rezultă $0 \leq l \leq x_1 < 1$. Pe de altă parte, trecând la limită în relația de recurență, avem $l = \dfrac{l^5 + 3l}{4} \Leftrightarrow l^5 = l$. Singura rădăcină reală din intervalul $[0,1)$ a acestei ecuații este $l = 0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n^4 + 3}{4} = \dfrac{3}{4}$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+2}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \cdot \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \boxed{\dfrac{9}{16}}$.

2. Problema 2

a) Cum funcția f_1 este pozitivă, aria mulțimii cuprinse între graficul lui f_1, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = 1$, este $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$.

b) $\displaystyle\int_0^1 x(f_1(x))^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+1)}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}$.

c) Scriem limita de calculat sub forma

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{1}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n^2}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right]$$

și observăm că avem de fapt limita sumei Riemann $S_{f_1}(\Delta, \xi)$ asociate funcției f_1, diviziunii $\Delta = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}\right\}$ a intervalului $[0,1]$ și punctelor intermediare $\xi_k = \frac{k}{n}$, $k = \overline{1,n}$. Or limita acestei sume Riemann este $\displaystyle\int_0^1 f_1(x)dx = \frac{\pi}{4}$.