BAC 2008

www.e-bacalaureat.com

Programa MT1, Subiectul III

Rezolvările variantei 016

versiune definitivă

1. Problema 1

a) Funcția f este derivabilă pe reuniunea de intervale deschise $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, fiind o compunere de funcții derivabile. Pentru orice $x\neq 0$ avem

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

Pe de altă parte, deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x^2}=0$ (produsul dintre funcția $x\mapsto x$ care tinde la 0 și funcția mărginită $x\mapsto\sin\frac{1}{x^2}$), funcția f este derivabilă în $x=0$ și $f'(0)=0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}\right)=0\cdot 1-0\cdot 1=\boxed{0}$

c) Fie funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t)=t-\sin t$. Deoarece $g'(t)=1-\cos t\geq 0$, pentru orice $t\in\mathbb{R}$, rezultă că g este crescătoare pe $\mathbb{R}$. Ca o consecință, $g(t)\geq g(0)=0$, adică $t\geq\sin t\Leftrightarrow 1\geq\dfrac{\sin t}{t}$ pentru orice $t>0$.

De aici rezultă că $1\geq\dfrac{\sin\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}=x^2\sin\dfrac{1}{x^2}=f(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$. Cum $f(0)=0$, avem $1\geq f(x)\,,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci f este mărginită superior.

Demonstrăm acum că $f(x)\geq -1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Dacă $x^2\geq 1$, atunci $0<\dfrac{1}{x^2}\leq 1<\pi\Rightarrow\sin\dfrac{1}{x^2}>0$ și prin urmare $f(x)>0$. Dacă $x^2<1$, atunci $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x^2}\geq -x^2>-1$. Cum $f(0)=0$, avem $f(x)\geq -1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și f este și mărginită inferior.

2. Problema 2

a) Avem $\displaystyle\int_0^1 f_2(x)dx=\int_0^1(1-x)^2dx=\int_0^1(x-1)^2dx=\left.\frac{(x-1)^3}{3}\right|_0^1=\boxed{\frac{1}{3}}$.

b) Făcând schimbarea de variabilă $x=1-y$, avem

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf_n(x)dx &= \int_0^1 x(1-x)^n dx=\int_1^0(1-y)y^n(-1)dy\\ &= \int_0^1(y^n-y^{n+1})dy=\left.\left(\frac{y^{n+1}}{n+1}-\frac{y^{n+2}}{n+2}\right)\right|_0^1\\ &= \frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\,.\end{aligned}$$

c) Calculăm integrala

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx &= \int_0^1\left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx = -\frac{n}{n+1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\Big|_0^1\\ &= -\frac{n}{n+1}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}-1\right]\\ &= \frac{n}{n+1}-\frac{n}{n+1}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right]^{-\frac{n+1}{n}}\end{aligned}$$

Folosind limita clasică $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ și faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx=\boxed{1-e^{-1}}.$$